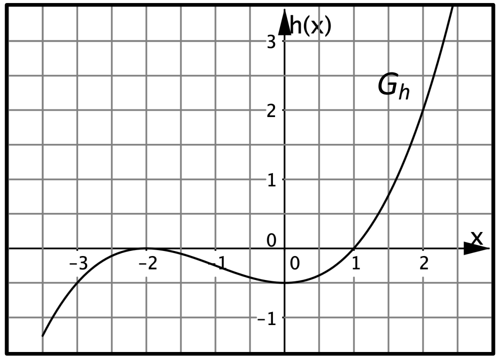
1.0 Gegeben ist die lineare Funktion $g: x \mapsto 3x - 1$ mit Definitionsmenge $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

1.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktion g an und erstellen Sie eine Zeichnung vom Graphen G_g für $0 \leq x \leq 2$ in einem kartesischen Koordinatensystem. 2

1.2 Berechnen Sie $\int_0^2 g(x)\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch bezüglich G_g. 3

2 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$. 3



Entscheiden sie anhand des Graphen G_h, ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

a) Es gilt: $h'(x) < 0$ für $x \in]-2; +1[$

b) Der Graph der Stammfunktion H von h besitzt einen Terrassenpunkt.

c) Es gilt: $h(-2) + h'(0) > 0$

3 Eine nach oben geöffnete Parabel besitzt den Scheitelpunkt $S(2|2k-1)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Die zugehörige quadratische Funktion $p_k: x \mapsto p_k(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie alle Werte für k, sodass die Parabel die x-Achse genau zweimal schneidet. 2

4 Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 2 \cdot e^{-x+1} - 1$ und der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = [1; \infty[$. Bestimmen Sie die Wertemenge von f. 4

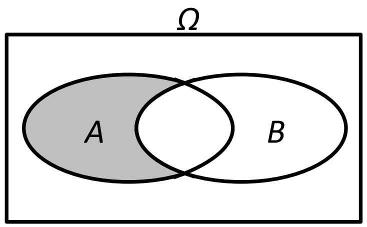
5 Lösen Sie die folgenden Gleichungen über der Grundmenge der reellen Zahlen. 6

a) $x^3 - 2x^2 + x = 0$

b) $(e^x - 2)^2 - 4 = 0$

6 Gegeben ist eine Modellfunktion zur Beschreibung der Entwicklung einer Bakterienpopulation im Labor durch $B: t \mapsto 2 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$. Dabei steht die Variable t für die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $B(t)$ für die Bakterienanzahl in einer Petrischale. Formulieren Sie eine mögliche Problemstellung im Sinne der vorliegenden Thematik, deren Lösung auf die Gleichung $0{,}4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1}$ führt, und lösen Sie die Gleichung nach t_1 auf. 2

1.0 A und B sind vereinbare Ereignisse des Ergebnisraums Ω. 3



1.1 Geben Sie das im nebenstehendem Venn-Diagramm grau markierte Ereignis E_1 möglichst einfach als Verknüpfung der Ereignisse A und B an.

1.2 Veranschaulichen Sie das Ereignis $E_2 = A \cup \overline{B}$ in einem Venn-Diagramm.

2.0 Ein Handballspieler trainiert Siebenmeter-Würfe, wobei der Torhüter seines Vereins im Tor steht. Erfahrungsgemäß trifft er bei 80% seiner Würfe ins Tor.

2.1 Der Spieler führt zwei Siebenmeter-Würfe aus. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse: 3

- E_3: „Der Spieler trifft jedes Mal."
- E_4: „Der Spieler trifft mindestens einmal."

2.2 Formulieren Sie zwei Ereignisse E_5 und E_6 im Sachzusammenhang, deren Wahrscheinlichkeiten sich wie folgt berechnen lassen: 2

- $P(E_5) = 0{,}8^{20}$
- $P(E_6) = \binom{50}{30} \cdot 0{,}8^{30} \cdot 0{,}2^{20}$

3 Einer Gruppe von fünf Jugendlichen werden zwei Freikarten für ein Rockkonzert zur Verfügung gestellt. Um diese zu verteilen, werden nacheinander Lose gezogen, ohne diese zurückzulegen. Jeder Jugendliche zieht dabei genau einmal. Neben den zwei Gewinnlosen für die Freikarten befinden sich drei Nieten in der Lostrommel. Entscheiden Sie unter Zuhilfenahme einer geeigneten Rechnung, ob der Zweite, der zieht, die gleiche Chance auf eine Freikarte hat wie der Erste. 4

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie jeweils die Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. Geben Sie die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ an. 9

1.2 Berechnen Sie die Wendestellen des Graphen von f und entscheiden Sie begründet, ob es sich dabei um Stellen mit maximaler positiver bzw. maximaler negativer Steigung von G_f handelt oder nicht. 6

1.3 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -4x - 2$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade G_g Tangente an den Graphen G_f an der Stelle $x = -2$ ist. 2

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-4 \leq x \leq +4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie als Maßstab $1\ \mathrm{LE} = 1\ \mathrm{cm}$ für beide Achsen. 4

2.0 Während das Bundesamt für Naturschutz seit 20 Jahren die Ausbreitung von Wölfen in Deutschland fördert, fordern u. a. Weidetierhalter und Jäger zunehmend eine Aufhebung des Abschussverbots von Wölfen. Um über die eventuelle Aufhebung dieses Verbots zu entscheiden, soll die Entwicklung der Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland modelliert werden. Die Entwicklung seit dem Jahr 2008 lässt sich näherungsweise durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{c \cdot t}$ mit $t, N_0, c \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0, N_0 > 0, c > 0$ darstellen. Der Funktionswert von N gibt die Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland zum Zeitpunkt t an. Dabei steht t für die seit Ende des Jahres 2008 ($t_0 = 0$) vergangene Zeit in Jahren. Endes des Jahres 2013 wurden 18 Wolfsrudel in Deutschland gezählt. Ende 2017 lag die Zahl der Wolfsrudel bereits bei 60.

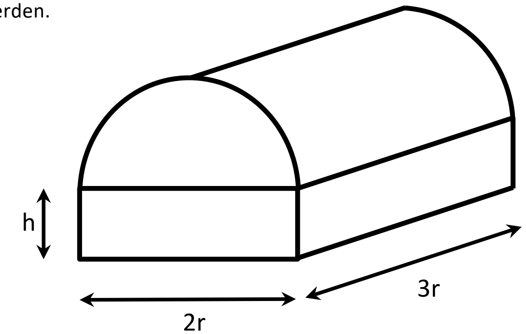
2.1 Ermitteln Sie die Werte der Parameter N_0 und c der Funktion N. Runden Sie N_0 ganzzahlig und c auf drei Nachkommastellen. 4

2.2.0 Im Folgenden gilt $N(t) = 4 \cdot e^{0{,}301 \cdot t}$.

2.2.1 Das Bundesamt für Naturschutz geht davon aus, dass Deutschland maximal Lebensraum für 440 Rudel bieten kann. Berechnen Sie, in welchem Jahr die Anzahl der Wolfsrudel laut dem Modell aus 2.0 voraussichtlich diesen Wert erreicht. 3

2.2.2 Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion N in der Form $N(t) = N_0 \cdot b^t$ mit $b > 0$ an und folgern Sie daraus die prozentuale Zunahme der Anzahl der Wolfsrudel pro Jahr. Runden Sie b auf drei Nachkommastellen. 2

3.0 Ein Tiergarten plant den Bau eines Tropenhauses, in dem ein künstliches Ökosystem mit Lebensbedingungen für tropische Pflanzen- und Tierarten geschaffen werden soll. Das Tropenhaus soll die Form eines Quaders mit aufgesetztem Halbzylinder bekommen. Der Radius des Halbzylinders wird mit r bezeichnet. Der Quader hat die Breite 2r, die Länge 3r und die Höhe h (siehe Skizze). Um möglichst ideale klimatische Bedingungen zu schaffen, sollen die Außenwände des Tropenhauses und das Dach aus Glas bestehen. Hierfür sind $1.000\ \mathrm{m}^2$ Glas vorgesehen. Die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses in Abhängigkeit vom Radius r des Halbzylinders lässt sich durch die Funktionswerte der Funktion $V: r \mapsto V(r)$ beschreiben. Aus den Baurichtlinien geht hervor, dass der Radius r des Halbzylinders maximal 8,5 m betragen darf. Der Tiergartenbetreiber fordert hierfür mindestens 4 m. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



3.1 Stellen Sie eine Gleichung der in 3.0 eingeführten Funktion V auf. Bestimmen Sie dazu vorab die Maßzahl A des Flächeninhalts der insgesamt zu verglasenden Oberfläche des Tropenhauses in Abhängigkeit des Radius des Halbzylinders und der Höhe des Quaders. 6

$$[\text{mögliche Ergebnisse: } A(r,h) = 10rh + 4\pi r^2 \quad \text{und} \quad V(r) = 600r - 0{,}9\pi r^3]$$

3.2 Um den Pflanzen und Tieren möglichst viel Lebensraum zur Verfügung zu stellen, soll das Tropenhaus maximalen Rauminhalt besitzen. Bestimmen Sie den Radius r so, dass die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses den absolut größten Werte annimmt und geben Sie diesen maximalen Wert an. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. 7

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{100}x(x-10)^2(x-24)$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an. 3

1.2 Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich der Funktionsterm $f(x)$ auch in der Form 3

$$f(x) = -\frac{1}{100}(x^4 - 44x^3 + 580x^2 - 2.400x)$$

darstellen lässt.

1.3 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. Geben Sie die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ an. 11

$$[\text{mögliches Teilergebnis: } f'(x) = -\frac{1}{25}(x-3)(x-10)(x-20)]$$

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $0 \leq x \leq +24$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. 5

1.5 Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des kleineren der beiden Flächenstücke. 4

2.0 Landwirte beklagen zunehmend Ernteausfälle durch anhaltende Dürren in den Sommermonaten. Während der durchschnittliche Ertrag an Weizen pro Hektar Anbaufläche 2014 noch bei 86,3 Dezitonnen lag, brachte die Ernte 2017 nur noch durchschnittlich 70,0 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche ein. Basierend auf den seit dem Jahr 2014 ausgewerteten Daten kann die Ertragsentwicklung vereinfacht durch die Funktion

$$\mathrm{E}: t \mapsto 56{,}3 \cdot e^{c \cdot t} + a$$

mit $t \in \mathbb{R}_0^+, c \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden. Der Funktionswert von E gibt den durchschnittlichen Weizenertrag in Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche zum Zeitpunkt t an. Dabei steht t für die vergangene Zeit in Jahren ab dem Jahr 2014 ($t_0 = 0$). Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

2.1 Ermitteln Sie den Mittelwert der jährlichen Abnahme des durchschnittlichen Weizenertrags pro Hektar Anbaufläche über die Jahre 2014 bis 2017. 3

2.2 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und c der Funktion E. Runden Sie c auf zwei Nachkommastellen. 4

2.3.0 Im Folgenden gilt: $\mathrm{E}(t) = 56{,}3 \cdot e^{-0{,}11 \cdot t} + 30$

2.3.1 Einige Landwirte sind der Meinung, dass der Weizenanbau ab einem durchschnittlichen Weizenertrag von 50 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche nicht mehr rentabel für sie ist. Berechnen Sie, ab welchem Jahr dies laut dem Modell der Fall wäre. 3

2.3.2 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte für E für $t \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. 3

2.3.3 Sofern Landwirte 2018 mit einem massiven Einbruch ihrer Weizenerträge konfrontiert waren, hatten sie Anspruch auf Unterstützungszahlungen des Bundes. War ihr durchschnittlicher Weizenertrag pro Hektar Anbaufläche um mehr als 30% geringer als der Mittelwert der entsprechenden Erträge in den Jahren 2015, 2016 und 2017, so konnten sie einen Antrag auf Nothilfen stellen. Prüfen Sie rechnerisch, ob sich gemäß dem hier gewählten mathematischen Modell eine Antragsberechtigung für Nothilfen ergibt. 4

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Telekommunikationsunternehmen bietet verschiedene Internetverträge an. Die Kunden können beim Vertragsschluss zwischen den Tarifen „Basic“ (B) und „Highspeed“ (H) wählen. Zudem können sie beschließen, ob sie einen neuen Router bei diesem Unternehmen mitbestellen (R) oder sich anderweitig einen Router organisieren $(\overline{\mathrm{R}})$. Falls sie sich für die Router-Bestellung entscheiden, können sie noch zusätzlich bestimmen, ob sie den Router selbst installieren (S), einen Techniker hiermit beauftragen (T) oder sogar einen Komplettservice (K) wählen, bei dem auch die Endgeräte der Kunden durch Mitarbeiter des Unternehmens gleich angebunden werden. Erfahrungsgemäß nehmen 60% der Kunden den „Basic“-Tarif. Unabhängig von der Tarifwahl entscheiden sich 80% der Kunden dafür, einen Router mitzubestellen. Von diesen Kunden will stets die Hälfte den Router selbst installieren. Kunden, die den „Basic“-Tarif mit Router wählen, möchten zu gleichen Anteilen einen Techniker kommen lassen oder den Komplettservice. Von den Kunden mit „Highspeed-Tarif und Router möchten 40% den Komplettservice.

Die zufällige Auswahl eines Kunden mit der Analyse seiner Vertragsoptionen wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlich-keiten aller acht Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments. 5
[Teilergebnis: $P(\{(H;R;K)\}) = 0{,}128$]

1.2 Gegeben sind folgende Ereignisse: 3

- E_1: „Ein zufällig ausgewählter Kunde ordert keinen firmeneigenen Router oder verlangt beim Wunsch nach einem firmeneigenen Router keinen Komplett-service.“
- $E_2 = \{(B;R;K);(B;\overline{R});(H;R;K);(H;\overline{R})\}$
- $E_3 = E_1 \cap E_2$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und formulieren Sie E_3 möglichst einfach im Sachzusammenhang. Berechnen Sie anschließend $P(E_3)$.

1.3 Beim Telekommunikationsunternehmen gehen von einigen Kunden Beschwer-den ein, dass die Internetverbindung oft unterbrochen wird. Bei einer Problem-analyse der Internetverbindung bei allen Kunden des Unternehmens soll unter-sucht werden, ob die Verbindungsabbrüche mit dem verwendeten Router zusammenhängen (mitbestellter Router (R) oder anderweitig organisierter Router). Aus Unternehmensdaten geht hervor, dass die Internetverbindung bei 60% aller Kunden ohne Unterbrechungen $(\overline{\mathrm{U}})$ funktioniert. Die Hälfte aller Kunden hat eine unterbrechungsfreie Internetverbindung und einen beim Telekommunikationsunternehmen mitbestellten Router. Es gilt weiterhin $\mathrm{P(R)} = 0{,}8$. 5

Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten $P_R(U)$ und $P_{\overline{R}}(U)$, z. B. mithilfe einer Vierfeldertafel. Formulieren Sie im Sinne des vorliegenden Sachzusammenhangs eine Aussage in Worten, in der Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten $P_R(U)$ und $P_{\overline{R}}(U)$ miteinander vergleichen.

2 In einer bestimmten Region Deutschlands sind vier verschiedene Arten von DSL-Internetanschlüssen verfügbar, wobei pro Haushalt nur genau eine der vier möglichen Anschlussarten gewählt werden kann. Die Tabelle veranschaulicht die Verteilung der verschiedenen Anschlüsse unter denjenigen Haushalten mit DSL-Anschluss: 6

Haushalte mit DSL 2.000	Haushalte mit DSL 6.000	Haushalte mit DSL 16.000	Haushalte mit DSL 50.000
17,3%	17,9%	19,8%	15,0%

Im Auftrag eines Internetdienstanbieters soll eine Umfrage zur Internetnutzung durchgeführt werden. Zu diesem Zweck werden 25 Haushalte der Region zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- E_4: „Genau drei der ausgewählten Haushalte besitzen einen DSL 2.000 – Anschluss“
- E_5: „Mindestens sechs, aber weniger als zehn der ausgewählten Haushalte besitzen einen DSL 50.000 – Anschluss.“
- E_6: „Weniger als die Hälfte der ausgewählten Haushalte verfügen über einen DSL – Internetanschluss.“

3 Für ein Glücksspiel wird eine gezinkte Münze verwendet, bei der „Kopf“ mit der Wahrscheinlichkeit 40% fällt. Man zahlt 4 € Einsatz und wirft dreimal die Münze. Fällt dreimal Kopf, werden 20 € ausbezahlt. Wenn immer abwechselnd Kopf und Zahl auftreten, erhält man 10 €. Sonst erfolgt keine Auszahlung. Prüfen Sie, ob das Spiel für den Spieler günstig, fair oder ungünstig ist. 4

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 In einer Gärtnerei werden drei Blumenarten gezüchtet und verkauft. Es handelt sich dabei um Tulpen (T), Osterglocken (O) und Krokusse (K). Während Krokusse ausschließlich aus Blumenzwiebeln (B) und Osterglocken ausschließlich aus Samen (S) gezüchtet werden, werden Tulpen sowohl aus Blumenzwiebeln als auch aus Samen erzeugt. Von allen drei Blumenarten werden gelbe (g) und weiße (w) zum Verkauf angeboten.

Die Hälfte aller verkauften Blumen sind Tulpen. Die beiden anderen Blumensorten werden jeweils zu gleichen Anteilen verkauft. Die aus Samen wachsenden Tulpen haben unter dieser Blumenart einen Verkaufsanteil von 40%. Unabhängig von Blumensorte und Züchtungsform werden 75% aller verkauften Blumen mit der Farbe Gelb gewählt.

Der Kauf einer Blume hinsichtlich ihrer Eigenschaften Blumenart, Züchtungsform und Farbe wird im Folgenden als Zufallsexperiment mit entsprechenden Wahrscheinlichkeiten betrachtet.

1.1 Erstellen Sie für das vorliegende Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und ermitteln Sie alle acht Elementarereignisse mit ihren Wahrscheinlichkeiten. 5
$[\text{Teilergebnis: } P(\{(T; B; g)\} = 0{,}225]$

1.2 Nun werden folgende Ereignisse betrachtet: 3

- E_1: „Die verkaufte Blume ist gelb und ist keine Tulpe."
- $E_2 = \{(T; S; g); T; S; w); (O; S; g); (O; S; w)\}$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und formulieren Sie E_2 möglichst einfach im Sachzusammenhang. Berechnen Sie anschließend $P(E_2)$.

2.0 Im Gewächshaus der Gärtnerei werden in einem neu angelegten Beet 30 Tulpenzwiebeln nebeneinander eingesetzt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}85$ geht eine eingesetzte Tulpenzwiebel auf und es wächst daraus eine Tulpe.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aus genau 25 der eingesetzten Zwiebeln Tulpen entstehen. 2

2.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_3: „Genau zwei der Zwiebeln gehen nicht auf und diese wurden direkt nebeneinander eingesetzt." 2

2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aus mindestens 29 der eingesetzten Zwiebeln Tulpen entstehen. Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage für alle Werte von k mit $1 \leq k \leq 29$ wahr ist: 4

„Die Wahrscheinlichkeit, dass aus 30 eingesetzten Tulpenzwiebeln mindestens k Tulpen entstehen, liegt nicht unter 4%."

3.0 Für die Zufallsgröße X ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $a, b \in \mathbb{R}$ durch folgende Tabelle vollständig gegeben:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	a	2b	b	0,1	0,1	0,04

3.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b, wenn der Erwartungswert von X gleich 1,7 ist. $[\text{Teilergebnis: } b = 0{,}2\ ]$ 3

3.2 Die Blumensorte Tulpe erzeugt während ihres Wachstums sogenannte Tochterzwiebeln, die ihrerseits wieder zur Entstehung weiterer Tulpen führen. Die unter 3.0 aufgeführte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den unter Aufgabe 3.1 bestimmten Werten für a und b gibt an, welche Anzahl von Tochterzwiebeln mit welcher Wahrscheinlichkeit auftritt. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. 4