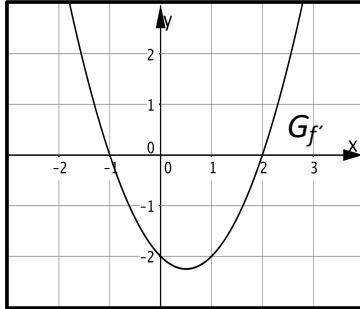


## 2021 A (ohne Hilfsmittel)

- 1.0 In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise eine Parabel. Diese ist der Graph der Ableitungsfunktion  $f'$  der Funktion  $f$  mit der Definitionsmenge  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ .



- 1.1 Leiten Sie nachvollziehbar die Lage und Art der lokalen Extremstellen von  $f$  aus dem Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion  $f'$  ab. Begründen Sie, weshalb die relativen Extrempunkte des Graphen von  $f$  nicht absolut sein können. 5
- 1.2 Bestimmen Sie anhand des Graphen  $G_{f'}$  die Lage der Wendestelle von  $f$  und entscheiden Sie begründet, ob die Wendetangente des Graphen der Funktion  $f$  steigt oder fällt. 3
- 2 Eine ganzrationale Funktion  $h$  dritten Grades mit der Definitionsmenge  $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$  besitzt die zugehörige erste Ableitungsfunktion mit der Funktionsgleichung 5

$$h'(x) = x^2 + 1$$

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion  $h'$  und begründen Sie damit, dass der Graph der Funktion  $h$  genau eine Nullstelle besitzt. Geben Sie außerdem einen möglichen Funktionsterm für  $h$  an.

- 3.0 Im Folgenden sind zwei Gleichungen gegeben. Lösen Sie die erste Gleichung und zeigen Sie die Unlösbarkeit der zweiten Gleichung.

3.1  $2x^4 - 18x^2 = 0$  3

3.2  $e^{x+1} + e^{x-1} = 0$  2

- 4 Eine ganzrationale Funktion  $g$  habe höchstens den Grad fünf. Die Tabelle zeigt das Krümmungsverhalten des Graphen  $G_g$ . 4

$x \in$	$] -\infty; +1]$	$[+1; +4]$	$[+4; +\infty[$
$G_g$	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

Geben Sie die Wendestellen der Funktion  $g$  an und argumentieren Sie, welchen Grad  $g$  nur haben kann.

## 2021 S (ohne Hilfsmittel)

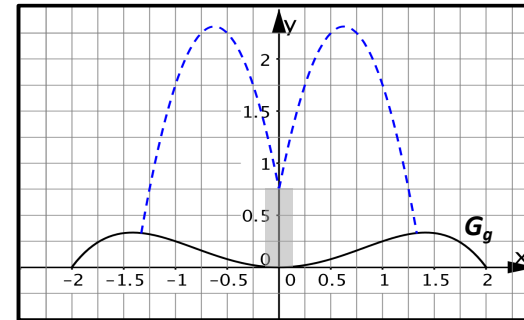
- 1 Eine Gemeinde in den Bergen ist ein beliebtes Reiseziel bei Winterurlaubern. Als Wintersportaktivitäten stehen Skifahren (S), Schneeschuhwandern (W) und Rodeln (R) zur Auswahl. Erfahrungsgemäß fahren drei Viertel der Urlauber Ski. Nur ein Drittel der Skifahrer nutzen auch das Angebot zum Schneeschuhwandern, unter den Nicht-Skifahrern unternehmen 80 % Schneeschuhwanderungen. Unabhängig von der Entscheidung für Skifahren oder Schneeschuhwandern geht jeder vierte Winterurlauber auch rodeln. Die Wahl der Wintersportaktivitäten eines beliebig herausgegriffenen Urlaubers wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann, dass ein Urlauber genau zwei der Wintersportaktivitäten nachgeht. Zeichnen Sie dazu ein Baumdiagramm. 4
- 2 Beim Kauf einer Liftkarte erhalten Personen, die Übernachtungsgäste in einem Hotel oder einer Pension vor Ort sind, einen Rabatt von 5%. Erfahrungsgemäß ist dies bei 60% aller Liftkartenkäufer der Fall. Kurz bevor der Lift in Betrieb geht, stehen an einer schon offenen Kasse bereits 15 Personen an. Interpretieren Sie folgenden Term im Sachzusammenhang: 2
- $$12 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^{11}$$
- 3.0 Um die Schneesicherheit zu erhöhen, wird im Skigebiet zwischen den Gemeinden Oberdorf (O) und Unterdorf ( $\bar{O}$ ) darüber diskutiert, ob eine Beschneiungsanlage gebaut werden soll. Um sich einen Überblick zu verschaffen, wie die Einwohner zu diesem Vorhaben eingestellt sind, wird eine Umfrage durchgeführt. Aus den beiden Gemeinden nehmen insgesamt 1200 Personen daran teil. Die Auswertung ergab, dass unter den 700 befragten Oberdorfern 600 Befürworter (B) sind. 25% aller Befragten sind aus Unterdorf und äußern Einwände gegen die Anlage.
- 3.1 Bestimmen Sie mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit, mit der ein zufällig ausgewählter Teilnehmer der Umfrage folgende Frage verneint: „Sind Sie aus Oberdorf und haben Sie gegen den Bau der Beschneiungsanlage gestimmt?“ 4
- 3.2 Geben Sie den Anteil der Befürworter der Beschneiungsanlage unter allen Befragten an und reflektieren Sie kritisch, ob die Umfrage für den Bau spricht. 2

## 2021 AI (mit Hilfsmittel)

- 1.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto (2x^2 - 4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 - 1}$  mit der Definitionsmenge  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ . Der Graph von  $f$  in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_f$  bezeichnet.
- 1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen  $G_f$  bezüglich des Koordinatensystems sowie das Verhalten der Funktionswerte von  $f$  für  $|x| \rightarrow \infty$ .
- 1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von  $G_f$  und geben Sie die Wertemenge  $\mathbb{W}_f$  der Funktion  $f$  an.  
[Teilergebnis:  $f'(x) = (8x - 2x^3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 - 1}$ ]
- 1.3 Stellen Sie die Gleichung der Tangente an  $G_f$  an der Stelle  $x = +1$  in allgemeiner Form auf.
- 1.4 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion  $f$  und zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von  $f$  für  $-3 \leq x \leq +3$  in ein kartesisches Koordinatensystem.  
Als Maßstab für beide Achsen gilt:  $1 \text{ LE} = 2 \text{ cm}$ .
- 1.5 Der Graph der Ableitungsfunktion von  $f$  und die x-Achse schließen im I. Quadranten des kartesischen Koordinatensystem im Bereich  $0 \leq x \leq +2$  ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks auf zwei Nachkommastellen gerundet.
- 1.6 Der Graph  $G_f$  und die Koordinatenachsen schließen im IV. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Schätzen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks geeignet ab.

w  
w  
w  
·  
m  
a  
t  
h  
e  
-  
p  
o  
r  
t  
a  
l  
·  
c  
o  
m

- 2.0 Die folgende Abbildung zeigt den Querschnitt eines Springbrunnens. Dieser hat eine kreisförmige Grundfläche mit einem Durchmesser von 4 Meter. Die Oberflächenlinie der im Querschnitt dargestellten Auffangwanne wird durch den Graphen  $G_g$  einer ganzrationalen Funktion  $g$  vierten Grades mit der Definitionsmenge  $\mathbb{D}_g = [-2; +2]$  beschrieben. Der Graph  $G_g$  in einem kartesischen Koordinatensystem ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Die Koordinaten  $x$  und  $y$  stellen Längenangaben in der Einheit Meter dar. Bei den folgenden Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



- 2.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von  $g$ . Entnehmen Sie dazu geeignete Werte aus der Zeichnung.  
[mögliches Ergebnis:  $g(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^2$ ]
- 2.2.0 Die Wasserfontänen treten – wie in obiger Abbildung gestrichelt dargestellt – aus einer in der Mitte befindlichen Säule aus und beschreiben Parabelbahnen. Ihr Verlauf ist abhängig vom Wasserdruck. Im Folgenden wird nur die rechte Wasserfontäne betrachtet. Alle möglichen Wasserstrahlen lassen sich durch die Graphen der Funktionen  $p_a$  mit  $p_a(x) = -ax^2 + 5x + 0,75$  und  $a \in \mathbb{R}^+$  darstellen.
- 2.2.1 Berechnen Sie, für welchen Wert von  $a$  der Strahl im Punkt  $A(+1 | +0,25)$  auf die Auffangwanne trifft.
- 2.2.2 Berechnen Sie, bis zu welcher maximalen Höhe  $h_{max}$  die Auffangwanne gefüllt werden kann, bevor sie überläuft.

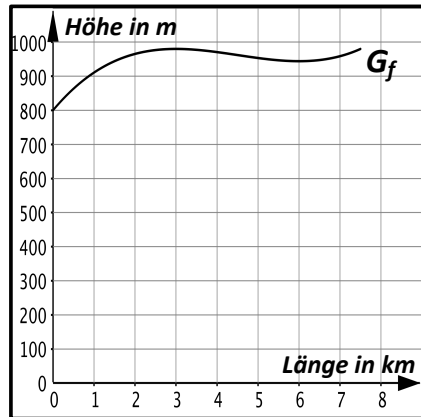
## 2021 AI (mit Hilfsmittel)

## 2021 AII (mit Hilfsmittel)

- 1.0 Ein Teilstück einer Langlaufloipe verläuft von oben betrachtet geradlinig und hat im Querschnitt das abgebildete Profil, welches annähernd durch den Graphen der Funktion

$$f: x \mapsto 8 \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + 100 \right)$$

mit der Definitionsmenge  $\mathbb{D}_f = [0; +7,5]$  beschrieben werden kann. Die x-Achse gibt die Länge in waagrechter Richtung an, auf der y-Achse ist die Höhe über dem Meeresspiegel aufgetragen. Die Koordinaten x und y stellen Längeneinheiten in der Einheit Kilometer bzw. Meter dar.



- 1.1 Ermitteln Sie die maximalen Teilintervalle von  $\mathbb{D}_f$ , in denen die Loipe auf- bzw. abwärts verläuft. 6
- 1.2 Berechnen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe 1.1, in welcher horizontalen Entfernung vom Beginn des Teilstückes der Loipe maximale Höhe erreicht wird. Geben Sie außerdem an, in welcher Höhe Sporttreibende sich am höchsten Punkt der Loipe befinden. 3
- 1.3 Ermitteln Sie, nach wie vielen Kilometern in horizontaler Entfernung vom Ausgangspunkt die Loipe am steilsten abwärts verläuft. 4
- 1.4 Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der Loipe in Prozent auf den ersten drei Kilometern. 3
- 1.5 Die Steigung der Loipe bei Kilometer 2 tritt im weiteren Verlauf der Loipe noch einmal auf. Berechnen Sie die Stelle, an der dies der Fall ist. 4

- 2.0 Gegeben ist die Funktion  $g: x \mapsto 2 - 5e^{-0,1x^2}$  mit der Definitionsmenge  $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$ . Der Graph von  $g$  in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_g$  bezeichnet. 5
- 2.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen  $G_g$  bezüglich des Koordinatensystems sowie das Verhalten der Funktionswerte von  $g$  für  $|x| \rightarrow \infty$ . Geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen  $G_g$  an. 5
- 2.2 Berechnen Sie die Nullstellen von  $g$ . Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. 3
- 2.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von  $G_g$ . Begründen Sie, warum dieser absolut ist, und geben Sie die Wertemenge  $\mathbb{W}_g$  der Funktion  $g$  an. [Teilergebnis:  $g'(x) = x \cdot e^{-0,1x^2}$ ] 6
- 2.4 Stellen Sie die Gleichung der Tangente an  $G_g$  an der Stelle  $x = +3$  in allgemeiner Form auf. 3
- 2.5 Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von  $G_g$  können auch ohne Verwendung der Ableitungsfunktion bestimmt werden. Begründen Sie dies mithilfe bekannter Ergebnisse. Verwenden Sie die Tatsache, dass nur höchstens ein Extrempunkt von  $G_g$  existiert. 3
- 2.6 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte im Bereich  $-7 \leq x \leq +7$  den Graphen der Funktion  $g$  in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie als Maßstab für beide Achsen:  $1 LE = 1 cm$  3

www.mathematik.com

## 2021 SI (mit Hilfsmittel)

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Nach Ihrem Studium arbeiten Sie in einer Süßwarenfabrik, in der Sie unter anderem für die Qualitätssicherung zuständig sind. In der Fabrik werden auch Schokoladentafeln zu je 100 g hergestellt.

- 1 In der Qualitätskontrolle wird eine Tafel auf ihr Sollgewicht hin überprüft. Die Zufallsgröße  $X$  gibt das gemessene Gewicht in Gramm an. In folgender Tabelle ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  dargestellt. Durchschnittlich wiegt eine Tafel 99,94 g. 5

$x$	98,5	99	100	101	101,5
$P(X = x)$	0,05	0,10	0,75	0,07	0,03

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Gewicht einer zufällig herausgegriffenen Schokoladentafel innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

- 2 Ein Defekt in der Abfüllanlage der Schokoladenmasse erhöht die Gewichtsschwankungen bei den Tafeln. Die Zufallsgröße  $Y$  gibt an, um wie viel Gramm das Gewicht einer Tafel von ihrem Sollgewicht abweicht. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $Y$  ist in folgender Tabelle dargestellt: 2

$Y$	4 g zu leicht	2 g zu leicht	0 g	2 g zu schwer	4 g zu schwer
$P(Y = y)$	0,30	0,20	0,35	0,10	0,05

Bis zur Reparatur der Anlage soll die Maschine so eingestellt werden, dass das Durchschnittsgewicht einer Tafel 100 g beträgt. Berechnen Sie den Wert für die einzustellende Gewichtsvorgabe der Abfüllanlage.

- 3.0 Die Schokoladentafeln gibt es in herkömmlicher Qualität sowie in Bioqualität. Der Hersteller bietet Nusschokoladen (N) und nussfreie Tafeln an. Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass von den Käufern der Nusschokolade 32 % Bioqualität wählen und sich 22 % der Käufer der nussfreien Sorte für das Bioprodukt entscheiden. Im Verkauf beträgt der Bioanteil (B) insgesamt 25 %.
- 3.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms den prozentualen Anteil der Nusschokoladen im Verkauf. 5
- 3.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 24 verkauften Schokoladentafeln genau 25% Bioqualität haben. 2

- 4.0 In den vergangenen Monaten kam es vermehrt zu Reklamationen von Seiten der Großabnehmer. Durchschnittlich gingen bei 10 % der Lieferungen Beanstandungen ein. Daher wurden Maßnahmen zur Qualitätsverbesserung der Schokoladen durchgeführt. Um zu überprüfen, ob der Anteil der reklamierten Lieferungen nach Abschluss der Verbesserungsmaßnahmen gesunken ist (Gegenhypothese), werden 200 Lieferungen im Hinblick auf Reklamationen untersucht. Die Fabrikleitung sieht folgendes Testverfahren vor: Sollten bei höchstens 14 der Lieferungen Beanstandungen eingehen, so geht man davon aus, dass die qualitätsverbessernden Maßnahmen erfolgreich waren, und will die dafür zuständigen Mitarbeiter mit einer Bonuszahlung belohnen.

- 4.1 Berechnen Sie für diesen Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art und deuten Sie diese im Sachzusammenhang. 4

- 4.2 Die Verbesserungsmaßnahmen haben dazu geführt, dass der Anteil  $p$  der Beanstandungen auf einen Wert von 5 % gesunken ist. Bestimmen Sie hierfür die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art und erläutern Sie den Zusammenhang zwischen dem Fehler 2. Art und der Bonuszahlung für die betroffenen Mitarbeiter. 5

w w w · m a t h e - p o r t a l . c o m

## 2021 SI (mit Hilfsmittel)

## 2021 SII (mit Hilfsmittel)

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0 Ein Großhändler für Saatgut verkauft Säcke verschiedener Sorten von Samenkörnern. Erfahrungsgemäß handelt es sich bei 15 % der verkauften Säcke um Saatgut für Viehweide (V). Säcke mit Samen für Sommerroggen (S) werden viermal so oft verlangt wie die mit Weißklee (W). Weißklee und Grasmischung (G) machen die Hälfte der verkauften Säcke aus. Nur 3 % sind Säcke mit Samen für Blumenwiese (B). Die Preise pro Sack können nachfolgender Preisliste entnommen werden.

Sorte	Preis pro Sack
▪ Viehweide	32,00 €
▪ Sommerroggen	26,00 €
▪ Weißklee	30,00 €
▪ Grasmischung	28,50 €
▪ Blumenwiese	20,00 €

- 1.1 Die Zufallsgröße  $X$  gibt den Preis pro verkauftem Sack in Euro an. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$ . [Teilergebnis:  $P(W) = 0,08$ ] 5
- 1.2 Berechnen Sie – unter Verwendung von Aufgabe 1.1 – den durchschnittlich zu erwartenden monatlichen Gewinn durch den Verkauf des Saatguts, wenn bekannt ist, dass der Großhändler pro Monat 120 Säcke Saatgut verkauft und ihm 30% vom Verkaufspreis als Gewinn bleiben. 2
- 2.0 Aufgrund von Kundenanfragen und da der Großhändler ein günstiges Angebot für Rotklee erhalten hat, will er in Zukunft eine Kleemischung aus Weißklee (W) und Rotklee (R) anbieten. Laut dem Samenproduzenten liegt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Samenkorn vom Weißklee keimt, bei 92,5%. Die Keimwahrscheinlichkeit der Rotkleesamen liegt bei 80%. 5
- 2.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms, in welchem Verhältnis der Großhändler Weiß- und Rotkleesamen mischen muss, damit die Keimwahrscheinlichkeit  $P(K)$  der Mischung bei 85% liegt. 5
- 2.2 Ein Landwirt kauft einen Sack der neuen Kleemischung, welche zu 85% keimt, und sät 200 Samenkörner auf einem kleinen frischgepflügten Teil einer seiner Wiesen aus. Die Zufallsgröße  $Y$  gibt die Anzahl der keimenden Samen an. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anzahl der keimenden Samen innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. 4

W  
W  
W  
·  
m  
a  
t  
h  
e  
-  
p  
o  
r  
t  
a  
l  
·  
c  
o  
m

- 3.0 Eine Gärtnerin möchte den Bienen in ihrer Umgebung etwas Gutes tun und kauft einen Sack Saatgut für eine Blumenwiese. Der Großhändler behauptet, dass die Blumensamen zu 90% keimen. Jedoch vermutet die Gärtnerin, dass es weniger sind (Gegenhypothese). Ist dies der Fall, so will sie ihr Saatgut in Zukunft von einem anderen Großhändler beziehen. Um ihre Vermutung zu überprüfen, sät sie 100 zufällig ausgewählte Samenkörner aus und beobachtet deren Keimverhalten. Sie will sich bei der Annahme ihrer Vermutung um höchstens 4% irren. 5
- 3.1 Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest für die Gärtnerin und geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 87 Blumensamen keimen. 5
- 3.2 Berechnen Sie für den in Aufgabe 3.1 entwickelten Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn man davon ausgeht, dass der Anteil der keimenden Samen bei 85% liegt. 2

## 2021 SII (mit Hilfsmittel)