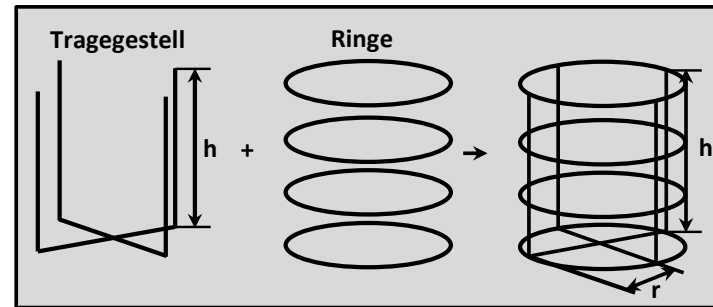


## 2019 AI (mit Hilfsmittel)

- 1.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion  $f: x \mapsto \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3)$  mit der Definitionsmenge  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ . Der Graph der Funktion  $f$  wird mit  $G_f$  bezeichnet.
- 1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion  $f$  mit der jeweiligen Vielfachheit. 3
- 1.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion  $f$  sowie die Art und Koordinaten des Extrempunktes des Graphen  $G_f$ . 7
- 1.3 Bestimmen Sie die Gleichungen aller Wendetangenten an den Graphen  $G_f$ . 8
- 1.4 Zeichnen Sie den Graphen  $G_f$  unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich  $-1 \leq x \leq +4$  in ein kartesisches Koordinatensystem. Für weitere Teilaufgaben wird auf der y-Achse der Bereich  $-3 \leq y \leq +3$  benötigt. 4  
Als Maßstab für beide Achsen gilt:  $1 LE = 1 cm$
- 2.0 Betrachtet wird weiter die quadratische Funktion  $p$  mit der Definitionsmenge  $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$ . Ihr Graph wird mit  $G_p$  bezeichnet.
- 2.1 Die Parabel  $G_p$  berührt den Graphen  $G_f$  aus 1.0 im Punkt  $B(+3 | +3)$  und verläuft durch den Koordinatenursprung. Bestimmen Sie  $p(x)$  und zeichnen Sie die Parabel  $G_p$  im Bereich  $-1 \leq x \leq +4$  in das vorhandene Koordinatensystem ein. 8  
[mögliches Ergebnis:  $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$ ]
- 2.2 Die Graphen  $G_f$  und  $G_p$  schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. 5
- 2.3 Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Schnittpunktes der Graphen  $G_f$  und  $G_p$ , der im III. Quadranten des Koordinatensystems liegt. 7
- 2.4 Bestimmen Sie die Steigungen der beiden Geraden durch den Punkt  $T(+3 | +4)$ , die den Graphen  $G_p$  berühren. 6

- 3.0 Ein Bastler möchte sich mithilfe folgender Bauanleitung das Grundgerüst für einen zylinderförmigen Abfallkorb mit Höhe  $h$  und Radius  $r$  aus Draht bauen. Alle Längen sind in Meter gemessen.

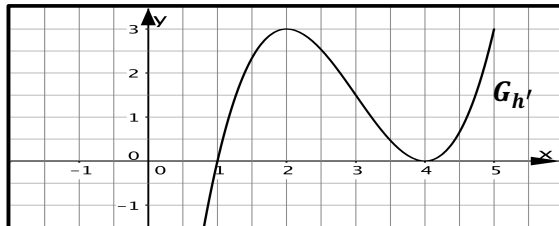


Für das Vorhaben kauft er sich Draht mit der Länge 6 m. Die Einzelteile werden selbst hergestellt und zusammengelötet. Die Dicke des Drahts ist zu vernachlässigen. Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

- 3.1 Bestimmen Sie die Maßzahl  $V(r)$  des Volumens des Abfallkorbs in Abhängigkeit von  $r$ . 5  
[mögliches Ergebnis:  $V(r) = \pi(\frac{3}{2}r^2 - r^3 - 2\pi r^3)$ ]
- 3.2 Aus praktischen Gründen wird für die Funktion  $V: r \mapsto V(r)$  als Definitionsmenge  $\mathbb{D}_V = [+0,1; +0,2]$  gewählt. Berechnen Sie den Radius  $r$  des Abfallkorbs für den Fall, dass die Maßzahl des Volumens ihren absolut größten Wert annimmt. Runden Sie Ihr Ergebnis auf drei Nachkommastellen. 7

# 2019 AII (mit Hilfsmittel)

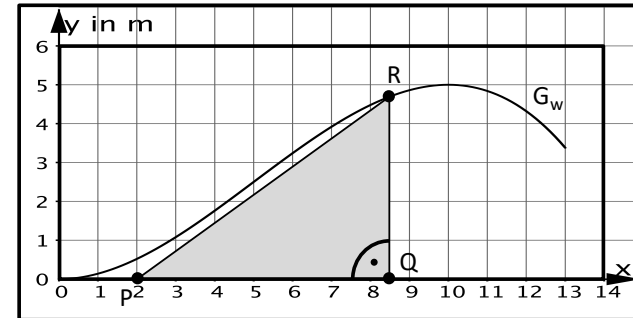
- 1.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto \frac{1}{5}(x^4 - 8x^3 + 18x^2)$  mit der Definitionsmenge  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ . Der Graph wird mit  $G_f$  bezeichnet. 3
- 1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von  $G_f$  bezüglich des Koordinatensystems und geben Sie das Verhalten von  $f(x)$  für  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow +\infty$  an. 3
- 1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  genau eine Nullstelle besitzt. Geben Sie diese mit Vielfachheit an. 3
- 1.3 Begründen Sie nur mithilfe der Ergebnisse aus 1.1 und 1.2, dass an der Stelle  $x = 0$  ein relatives und zugleich absolutes Minimum von  $f$  vorliegen muss. 3
- 1.4 Zeigen Sie, dass an den Stellen  $x = +1$  und  $x = +3$  Wendestellen von  $f$  liegen. Ermitteln Sie auch die Koordinaten der zugehörigen Punkte und welcher der beiden Punkte ein Terrassenpunkt ist. 7
- 1.5 Die Wendepunkte aus Teilaufgabe 1.4 legen die Gerade  $G_g$  fest. Ermitteln Sie deren Gleichung. 3
- 1.6 Zeichnen Sie die Graphen  $G_f$  und  $G_g$  unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich  $-1 \leq x \leq +4,5$  in ein kartesisches Koordinatensystem. Als Maßstab für beide Achsen gilt:  $1 LE = 1 cm$  5
- 1.7 Die Graphen  $G_f$  und  $G_g$  schließen drei endliche Flächenstücke ein. Schraffieren Sie das mittlere Flächenstück in Ihrer Zeichnung von Aufgabe 1.6 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhaltes. 5
- 2 Gegeben ist der Graph  $G_{h'}$  der 1. Ableitung  $h'$  der Funktion  $h$  mit der Definitionsmenge  $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$ . 8



Bestätigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen begründet:

- $G_h$  hat einen Tiefpunkt bei  $x = +1$
- $G_h$  hat einen Tiefpunkt bei  $x = +4$
- $G_h$  hat einen Wendepunkt bei  $x = +2$
- Die Tangente an  $G_h$  in  $x = +2$  verläuft parallel zur Geraden  $y = 3x + 7$

- 3 Gegeben ist die reelle Funktion  $k: x \mapsto \frac{1}{9}(x^4 - 2x^3)$  mit  $x \in \mathbb{R}$ . Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion  $k$  an und ermitteln Sie die Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des zugehörigen Graphen  $G_k$ . 9
- 4.0 Auf der Außenwand eines neuen Hallenbades soll dessen Logo, eine Welle, abgebildet werden. Der Architekt möchte ein großes Fenster in Form eines rechtwinkligen Dreiecks (siehe Skizze  $\triangle PQR$ ) innerhalb der Welle anbringen. 9



Das Fenster soll am Punkt  $P(+2|0)$  beginnen. Seine Breite  $|\overline{PQ}|$  soll mindestens 5 m und höchstens 10 m betragen. Der Punkt R soll auf der oberen Begrenzungslinie (Graph  $G_w$ ) der Welle liegen, welche durch die Funktion

$$w: x \mapsto -0,01x^3 + 0,15x^2$$

beschrieben wird. Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

- 4.1 Zeigen Sie, dass die Maßzahl A der Fläche des Fensters in Abhängigkeit von der x-Koordinate des Punktes Q durch die Funktionsgleichung 5

$$A(x) = 0,005(-x^4 + 17x^3 - 30x^2)$$

beschrieben wird, und geben Sie für die Funktion A einen Definitionsbereich  $\mathbb{D}_A$  an, den Vorgaben von 4.0 entspricht.

- 4.2 Der Architekt möchte das Hallenbad möglichst hell gestalten. Deshalb soll die Fläche des Fensters möglichst groß sein. Bestimmen Sie die x-Koordinate des Punktes Q, für welche die Maßzahl der Fläche A maximal wird. Berechnen Sie für diesen Fall die Breite, Höhe und Fläche des Fensters. Ermitteln Sie außerdem den prozentualen Anteil der Fensterfläche an der Logofläche, wenn diese  $36 m^2$  beträgt. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. 9

# 2019 AII (mit Hilfsmittel)

## 2019 SI (mit Hilfsmittel)

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0 Der Pizzalieferdienst „Happy-Pizza“ feiert sein 10-jähriges Firmenjubiläum und bietet dazu seine Pizzen in den Größen Klein (K), Normal (N) und XXL (X) zu besonders günstigen Preisen an. Ein Fünftel der Kunden entscheidet sich für die kleine Pizza und nur jeder zehnte Kunde für die XXL-Größe. Zu jeder Pizza kann man einen Salat (S) dazu bestellen. Unabhängig von der Wahl der Pizzagröße entscheiden sich 30% für den Salat. Um die XXL-Pizza stärker zu bewerben, bekommt man dazu gratis ein kleines Getränk (G) oder ein Dessert (D). Die Entscheidung für ein Dessert ist unabhängig davon, ob ein Salat bestellt wird. Es ist bekannt, dass 1% aller Kunden eine XXL-Pizza mit Salat und Dessert bestellen. Eine Pizza-Aktionsbestellung eines zufällig ausgewählten Kunden wird als Zufallsexperiment aufgefasst.
- 1.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. 6
- 1.2 Es werden folgende Ereignisse definiert: 3
- $E_1$ : „Ein Kunde erhält ein Gratisgetränk.“
  - $E_2 = \{KS; NS; XSG; XSD\}$
- Geben Sie  $E_1$  in aufzählender Mengenschreibweise an, formulieren Sie  $E_2$  möglichst einfach in Worten und geben Sie seine Wahrscheinlichkeit an.
- 2.0 Von den in 1.0 angegebenen Bestellvarianten kostet die kleine Pizza 5 €, die Pizza in Normalgröße 7 € und die XXL-Variante 10 €. Ein Salat kostet 3 €. Die Zufallsgröße X beschreibt die Kosten pro Bestellung.
- 2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und stellen Sie diese geeignet grafisch dar. 6
- 2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kosten pro Bestellung innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. 5
- 3 Nach 1.0 beträgt die Wahrscheinlichkeit  $p = 0,1$ , dass eine XXL-Pizza bestellt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass bei 50 Bestellungen:
- $E_3$ : „genau 40 Kunden keine XXL-Pizza bestellen“
  - $E_4$ : „mehr als 5 Kunden eine XXL-Pizza bestellen“
  - $E_5$ : „mindestens 2, aber höchstens 8 Personen eine XXL-Pizza bestellen“

w  
w  
w  
·  
m  
a  
t  
h  
e  
-  
p  
o  
r  
t  
a  
l  
·  
c  
o  
m

- 4 Marlene, Martin, Max, Michael und Moritz wählen jeweils ihre Lieblingspizza und bestellen gemeinsam bei „Happy-Pizza“. Nach der Lieferung der 5 unterschiedlichen Pizzen sucht sich zunächst Marlene ihre vegetarische Pizza heraus. Anschließend wählen die vier Jungs nacheinander zufällig einen der übrigen, noch geschlossenen Pizzakartons aus. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit alle ihre bestellte Pizza erhalten. 2
- 5.0 Der Organisator der Werbeaktion aus 1.0 vermutet, dass aufgrund der Aktion mehr als 10% XXL-Pizzen verkauft werden (Gegenhypothese). Zur Überprüfung der Vermutung wird ein Hypothesentest durchgeführt, der auf den nächsten 100 Pizzabestellungen beruht.
- 5.1 Geben Sie zu diesem Test die Testgröße und die Nullhypothese an und bestimmen Sie auf dem 5%-Niveau den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. 5
- 5.2 Erklären Sie, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht. 2
- 6.0 Ein anderer Pizzalieferdienst bietet neben Pizzen auch noch Nudelgerichte (N) an. Aus Erfahrung weiß man, dass 28% aller Kunden Nudelgerichte (N) bestellen, die restlichen eine Pizza ( $\bar{N}$ ). Bei 3 von 10 Bestellungen wird zusätzlich Salat (S) geordert und bei der Hälfte aller Bestellungen lediglich eine Pizza.
- 6.1 Bestimmen Sie mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde eine Pizza ( $\bar{N}$ ) mit Salat (S) bestellt. 3
- 6.2 Zeigen Sie, dass für die Ereignisse N und S gilt: 3
- $$P(N \cap S) \neq P(N) \cdot P(S)$$
- Deuten Sie außerdem das Ergebnis.

## 2019 SI (mit Hilfsmittel)

## 2019 SII (mit Hilfsmittel)

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0 Bei einem internationalen Fußballwettbewerb überlegt der Veranstalter schon im Vorfeld, aus welchen Gruppen sich die Besucher in den Stadien zusammensetzen. Man rechnet mit 60% fanatischen Anhängern (F) der jeweiligen Mannschaften. Die restlichen Besucher sind neutral (N). Die Hälfte aller Personen in den Stadien wird wohl Alkohol trinken (A). Ohne Alkoholgenuss geht man bei 2% der Besucher von einer gewissen Gewaltbereitschaft (G) aus. Durch Alkoholgenuss verfünffacht sich diese Wahrscheinlichkeit. Zu welcher der verschiedenen Kategorien eine beliebig herausgegriffene Person im Stadion zählt, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.
- 1.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. 5
- 1.2 Es werden die folgenden Ereignisse definiert: 5
- $E_1$ : „Ein zufällig ausgewählter Besucher trinkt keinen Alkohol.“
  - $E_2$ : „Die Person ist fanatisch und friedlich oder neutral und gewaltbereit.“
- Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und prüfen Sie sie auf stochastische Unabhängigkeit.
- 1.3 Geben Sie in Mengenschreibweise ein Ereignis  $E_3$  an, das unvereinbar mit  $E_1$  ist und dessen Wahrscheinlichkeit 42% von  $P(E_1)$  beträgt. 2
- 2 Während der gesamten Spiele sind 400 Fußballer im Einsatz. 80% von ihnen werden erfahrungsgemäß in Zweikämpfen in regelwidrigen Körperkontakt mit dem Gegner kommen (K). 180 Spieler bekommen eine gelbe Karte als Verwarnung (V), zwei Drittel davon im Zusammenhang mit einem unerlaubten Körperkontakt. Stellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständige Vierfeldertafel auf, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$E_4 = \overline{K \cup V}$$

und interpretieren Sie  $E_4$  im Sinne der vorliegenden Thematik.

- 3.0 Die Zufallsgröße  $X$  gibt die Tordifferenz bei den Spielergebnissen im Turnier an. Unter Vernachlässigung von Tordifferenzen größer als fünf ergibt sich mit den Parametern  $a, b \in \mathbb{R}$  folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$x$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,5	$2b$	$a$	$5b - 0,4$	$2a - 0,24$	0,02

- 3.1 Berechnen Sie die Parameter  $a$  und  $b$ , wenn  $P(X \leq 2) = 0,84$  gilt, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar. 7  
[Teilergebnis:  $a = 0,14$ ]
- 3.2 Berechnen Sie mit den Werten für  $a$  und  $b$  aus Aufgabe 3.1, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte von  $X$  innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. 5
- 4 Beim Elfmeterschießen erzielen die Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p = 0,75$  tatsächlich ein Tor. Es werden nun 10 Elfmeter betrachtet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse: 4
- $E_5$ : „Mehr als drei, aber weniger als acht Schützen erzielen ein Tor.“
  - $E_6$ : „Nur die ersten vier oder nur die letzten vier Elfmeter ergeben ein Tor.“
- 5.0 Die Fehlerquote bei Entscheidungen der eingesetzten Schiedsrichter soll höchstens 12,5% betragen. Bei einem der jüngeren Schiedsrichter vermutet man aber einen höheren Anteil (Gegenhypothese). In nächster Zeit werden deshalb 200 seiner Entscheidungen auf Fehler hin untersucht.
- 5.1 Geben Sie zu diesem Test Testgröße und Nullhypothese an und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. 5
- 5.2 Erläutern Sie im Sachzusammenhang, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht. 2

w  
w  
w  
.  
m  
a  
t  
h  
e  
-  
p  
o  
r  
t  
a  
l  
.  
c  
o  
m

## 2019 SII (mit Hilfsmittel)