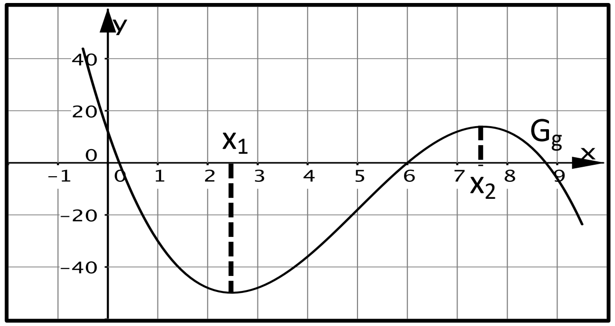
1.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion g dritten Grades mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$, deren Graph G_g in folgender Abbildung dargestellt ist.



Vom Graphen sind folgende Eigenschaften bekannt:

- G_g hat eine Nullstelle bei $x = +6$
- G_g hat eine Tangente G_t mit $t: y = 16x - 96$ mit $x \in \mathbb{R}$ durch $x = +6$
- G_g besitzt den Wendepunkt $W(+5|-18)$

1.1 Skizzieren Sie den Graphen $G_{g'}$ der 1. Ableitungsfunktion von g in ein geeignetes Koordinatensystem und geben Sie die maximalen Monotonieintervalle der 1. Ableitungsfunktion g' an. 5

1.2.0 Zur Ermittlung des Funktionsterms $g(x)$ liegt folgendes Gleichungssystem vor:

$$
\begin{array}{lr}
\text{I} & 216a + 36b + 6c + d = 0 \\
\text{II} & 125a + 25b + 5c + d = 18 \\
\text{III} & 108a + 12b + c = 16 \\
\text{IV} & 30a + 2b = 0
\end{array}
$$

1.2.1 Geben Sie nachvollziehbar an, welche Ansätze zu diesen Gleichungen führen. 4

1.2.2 Bestimmen Sie $g(x)$ mithilfe der Gleichungen aus 1.2.0. 7

2.0 Gegeben ist nun die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{10} \cdot g(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 15x^2 - 56x + 12)$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, wobei g die Funktion aus Teilaufgabe 1.2.2 ist. Der zugehörige Graph wird mit G_f bezeichnet.

2.1 Berechnen Sie alle Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen. 7

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_f. Runden Sie die Koordinaten auf eine Nachkommastelle. 6

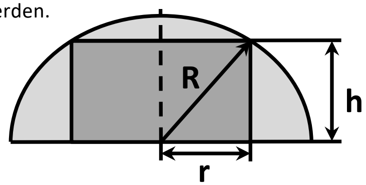
2.3 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von G_f. 4

2.4 Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen G_f im Bereich $-1 \leq x \leq +10$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie als Maßstab für beide Achsen: $1\,LE = 1cm$ 5

2.5 Es gilt $\int_{-2}^{+6} f(x)\,dx = 0$. Interpretieren Sie dieses Ergebnis in Bezug auf G_f. 2

2.6 Die Parabel G_p mit $p(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}4x + 1{,}2$ und $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$ schließt mit G_f im I. und IV. Quadranten zwei endliche Flächenstücke ein. Zeichnen Sie in das vorhandene Koordinatensystem G_p für $-1 \leq x \leq +10$ ein, schraffieren Sie das linke der beiden Flächenstücke und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Die Integrationsgrenzen können der Zeichnung entnommen werden. 7

3.0 Einer Halbkugel mit Radius $R = 10\,cm$ soll ein Zylinder mit Radius r und Höhe h einbeschrieben werden (siehe Skizze). Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.



3.1 Ermitteln Sie die Maßzahl $V(h)$ des Volumens des Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe h und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion $V: h \mapsto V(h)$ an, wenn die Höhe h mindestens 6 cm betragen soll.
[mögliches Teilergebnis: $V(h) = h\pi(100 - h^2)$] 4

3.2 Berechnen Sie h so, dass $V(h)$ den absolut größten Wert annimmt, und unter-suchen Sie, ob das maximale Volumen V_{max} des Zylinders mehr als die Hälfte des Halbkugelvolumens beträgt. 9

2018 AI (mit Hilfsmittel)

1.0 Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ist symmetrisch zur y-Achse und hat einen Wendepunkt $W_1(+1|+2{,}5)$. Die Tangente G_t im Punkt W_1 besitzt die Gleichung $t\colon y = 4x - 1{,}5$ mit $x \in \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$. 7
[mögliches Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{2}(x^4 - 6x^2)$]

1.2 Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f und deren Vielfachheit. Erklären Sie außerdem die Bedeutung der Vielfachheit dieser Nullstellen für den Graphen G_f. 5

1.3 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f. 8

1.4 Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph G_f genau zwei Wendepunkte besitzt und geben Sie die Koordinaten des zweiten Wendepunkts an. Berechnen Sie auch die x-Koordinaten sämtlicher Punkte von G_f, welche die gleichen y-Koordinaten wie die Wendepunkte haben. 7

1.5 Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen G_f im Bereich $-2{,}5 \leq x \leq +2{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Für weitere Teilaufgaben wird auf der y-Achse der Bereich $-5 \leq y \leq +5$ benötigt. Als Maßstab für beide Achsen gilt: $1\ LE = 1\ cm$ 5

1.6 Zeigen Sie, dass an der Stelle $x = -2$ die Gleichung $f(x) - f'(x) = 0$ gilt und bestimmen Sie alle weiteren Stellen mit dieser Eigenschaft. Erklären Sie, was das Ergebnis für den Graphen G_f bedeutet. 7

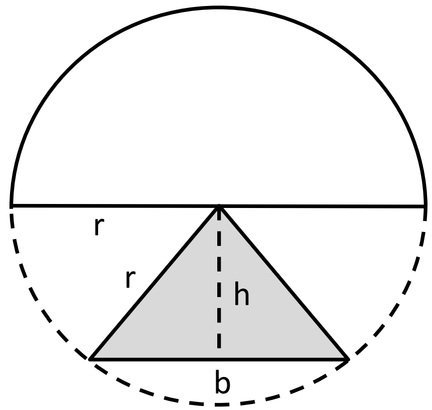
1.7 Geben Sie exakt die Nullstellen und die Extremstellen der ersten Ableitungsfunktion f' an und zeichnen Sie den zugehörigen Graphen $G_{f'}$ in das vorhandene Koordinatensystem im Bereich $-2 \leq x \leq +2$ mit Farbe ein. 4

1.8 Die Graphen G_f und $G_{f'}$ schließen ein endliches Flächenstück ein, das im II. und III. Quadranten des Koordinatensystems liegt. Markieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. 5

2 Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: 3

Ist der Graph G_h einer ganzrationalen Funktion h symmetrisch zur y-Achse, dann ist der Graph $G_{h'}$ der zugehörigen ersten Ableitungsfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

3.0 Das Designstudio hat eine Nachttischleuchte entworfen. Diese besteht aus einem halbkugelförmigen Schirm mit Radius $r = 12\ cm$ und einem Leuchtenfuß in der Form eines geraden Kreiskegels mit der Höhe h und dem Durchmesser b in der Grundfläche (siehe Skizze). Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.



3.1 Bestimmen Sie die Maßzahl $V(h)$ des Volumens des Fußes der Leuchte in Abhängigkeit von h. [mögliches Ergebnis: $V(h) = \frac{\pi}{3}(-h^3 + 144h)$] 3

3.2 Aus technischen Gründen wird für die Funktion $V\colon h \mapsto V(h)$ als Definitionsbereich $\mathbb{D}_V = [+2; +8]$ gewählt. Bestimmen Sie die Höhe des Leuchtenfußes so, dass die Maßzahl seines Volumens den absolut größten Wert annimmt. Nach Auffassung der Designer würde dann die Leuchte die ansprechendsten Proportionen besitzen. 6

1.0 Vor einem Tennisturnier werden die verwendeten Tennisbälle hinsichtlich der Qualität geprüft. Aus Erfahrung weiß man, dass 90% der Bälle den richtigen Durchmesser aufweisen (D), 10% Fehler in der Form ($\overline{F}$) sowie 20% Fehler in der Elastizität ($\overline{E}$) zu beklagen sind. Alle Fehler treten unabhängig voneinander auf. Im Zufallsexperiment wird ein beliebig ausgewählter Ball auf die drei möglichen Fehler untersucht.

1.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments. 5

1.2.0 Gegeben seien folgende Ereignisse:

- E_1: „Der Ball weist genau 2 Fehler auf."
- $E_2 = \{DFE; DF\overline{E}; \overline{D}FE; \overline{D}F\overline{E}\}$

1.2.1 Notieren Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise und fassen Sie E_2 möglichst einfach in Worte. Prüfen Sie ferner E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit. 5

1.2.2 Geben Sie ein Ereignis E_3 an, für das gilt: 2

$$10 \cdot P(E_3) = P(E_2)$$

2.0 Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Fehler eines Balls an. Es treten nur die drei in 1.0 genannten Fehler

- falscher Durchmesser (D)
- falsche Form (F)
- falsche Elastizität (E)

mit ihren zugehörigen Wahrscheinlichkeiten auf.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. 2

2.2 Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte um höchstens die einfache Standardabweichung vom Erwartungswert abweichen. 5

In den Teilaufgaben 3 und 4 habe das Ereignis „fehlerfreier Ball" die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}65$.

3 Einem Vorratsbehälter werden der Reihe nach 15 Bälle mit Zurücklegen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse: 6

- E_4: „Genau 5 Bälle sind fehlerfrei."
- E_5: „Genau 7 Bälle sind fehlerfrei, aber nicht die ersten 5 Bälle."
- E_6: „Mindestens 10 Bälle, aber weniger als 14 Bälle sind fehlerfrei."
- E_7: „Nur 2 Bälle sind fehlerfrei und diese folgen nacheinander."

4.0 Nach der Anschaffung einer neuen Maschine behauptet der Hersteller, dass der Anteil fehlerfreier Bälle auf über 65% gestiegen ist (Gegenhypothese). Zur Überprüfung wird ein Signifikanztest mit 100 zufällig ausgewählten Bällen durchgeführt.

4.1 Sind mindestens 70 Bälle fehlerfrei, so geht man von einer verbesserten Maschine aus. Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art. 4

4.2 Ermitteln Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. 4

5.0 Die Tennisfreunde Bernie und Nobby vereinbaren eine kleine Trainingseinheit von 4 Spielen. Bei jedem Spiel hat Bernie die konstante Gewinnwahrscheinlichkeit $p > 0$. Das Ereignis „Bernie gewinnt genau einmal" ist doppelt so wahrscheinlich wie das Ereignis „Bernie gewinnt nie".

5.1 Berechnen Sie hieraus p. 4

[Ergebnis: $p = \frac{1}{3}$]

5.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse: 3

- E_8: „Bernie gewinnt genau zweimal."
- E_9: „Bernie gewinnt höchstens einmal."

1.0 Die Fluggesellschaft TransAir bietet ihren Fluggästen neben den Standardmenüs (S) auch vegetarische Menüs ($\overline{S}$) an. Es werden nun die Fluggäste betrachtet, die tatsächlich essen und trinken. Diese Passagiere entscheiden sich zu 80% für den Menütyp S, und von diesen wählen 75% Fleisch (F), der Rest Fisch ($\overline{F}$). Von denen, die den Menütyp ($\overline{S}$) bevorzugen, entscheidet sich ein Fünftel für vegane Kost (V), der Rest für nicht vegane Kost ($\overline{V}$). Alle Fluggäste haben ferner die Wahlmöglichkeit zwischen einem alkoholischen Getränk (A) und einem alkoholfreien Getränk ($\overline{A}$). Wählt ein Fluggast ein Standardmenü, so entscheidet er sich zu 50% für ein alkoholisches Getränk, ansonsten nur zu 25%. Die Entscheidung eines zufällig ausgewählten Passagiers für Menütyp, Speise und Getränk wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments. 5

1.2.0 Gegeben seien folgende Ereignisse:

- E_1: „Ein Fluggast entscheidet sich für ein alkoholfreies Getränk."
- $E_2 = \{SFA; SF\overline{A}; \overline{S}VA; \overline{S}V\overline{A}\}$

1.2.1 Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und fassen Sie E_2 möglichst einfach in Worte. Prüfen Sie ferner E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit. 5

1.2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E_1 \cup E_2)$. 2

1.2.3 Analysieren Sie den Fehler in der Rechnung $P(E_2) = \frac{4}{8} = 0{,}5$. 2

2.0 Von den in Aufgabe 1 beschriebenen Menüvarianten ist nur die vegetarische Kost $(\overline{S})$ mit einem alkoholfreien Getränk $(\overline{A})$ ohne Aufpreis erhältlich. Ein Standardmenü (S) kostet 3 € Aufpreis und für ein alkoholisches Getränk (A) wird ein Aufpreis von 2 € erhoben. Die Zufallsgröße X beschreibt den möglichen Aufpreis in €. Dann lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x	0	2	3	5
$P(X = x)$	0,15	0,05	0,40	0,40

2.1 Begründen Sie die Richtigkeit der angegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung. 4

2.2 Berechnen Sie den durchschnittlich zu zahlenden Aufpreis sowie die Standardabweichung von X. 3

2.3 Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in einem Histogramm dar und tragen Sie auch die Ergebnisse von 2.2 sinnvoll darin ein. 4

3.0 Im vollbesetzten Flugzeug sitzen 200 Fluggäste in 25 Reihen. In jeder Reihe sitzen gleich viele Passagiere. Nach 2.0 beträgt die Wahrscheinlichkeit, beim Menü keinen Aufpreis zahlen zu müssen, $p = 0{,}15$.

3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse: 8

- E_3: „Mindestens 30 Fluggäste zahlen keinen Aufpreis."
- E_4: „Mehr als 25, aber höchstens 35 Fluggäste zahlen keinen Aufpreis."
- E_5: „In den ersten drei Reihen sitzt jeweils genau ein Fluggast, der keinen Aufpreis zahlt."
- E_6: „In der ersten Reihe zahlen nur die Fluggäste auf den beiden Fensterplätzen keinen Aufpreis."

3.2 TransAir vermutet, dass infolge des gestiegenen Gesundheitsbewusstseins in der Bevölkerung der Anteil der vegetarischen Antialkoholiker, also derjenigen, die keinen Aufpreis zahlen müssen, zugenommen hat (Gegenhypothese). Daher wird für das in 3.0 beschriebene Flugzeug ein Hypothesentest auf dem Signifikanzniveau von 5% vorgenommen.

3.2.1 Geben Sie die Nullhypothese sowie die Testgröße an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich für die Nullhypothese. 5

3.2.2 Berechnen Sie, wie hoch der prozentuale Anteil der Fluggäste, die keinen Aufpreis zahlen, in diesem Flugzeug höchstens sein darf, damit die Nullhypothese nicht verworfen wird. 2